

О выборе критерия оптимальности в численных методах расчета САР

Каким критерием оптимизации переходных процессов в САР эффективнее пользоваться на практике?

И.Г. Варламов

(Промышленные АСУ и контроллеры. 2005. № 5)

Приводятся результаты сравнительного анализа использования различных критериев оптимальности при расчете настроечных параметров регулятора в САР. Наряду с интегральными критериями, используемыми в расчетах на детерминированное ступенчатое воздействие, рассматривается критерий, минимизирующий дисперсию отклонения регулируемой величины при возмущениях, носящих случайный характер. Анализ выполнен на примере линейной одноконтурной САР с ПИ регулятором. Поиск оптимальных настроек для различных критериев оптимальности проводился численным методом по имитационной модели на заданный запас устойчивости с использованием эволюционного алгоритма "Optim-MGA" [1, 2].

Ключевые слова: эволюционный алгоритм оптимизации, критерий оптимальности, показатель запаса устойчивости, интегральные критерии, оптимальные настроечные параметры, критерий минимальной дисперсии, корреляционная функция, переходный процесс, амплитудно-частотная характеристика, поверхность отклика, имитационное моделирование.

Keywords: evolutionary optimization algorithm, optimality criterion, stability margin, integral criteria, optimal settings, minimum variance criterion, correlation function, transient, frequency response, response surface, simulation.

Одним из основных этапов при решении задачи синтеза и анализа вновь проектируемой САР является выбор критерия ее оптимального функционирования. Структурная схема одноконтурной САР, на которой проводились исследования, представлена на рис. 1.

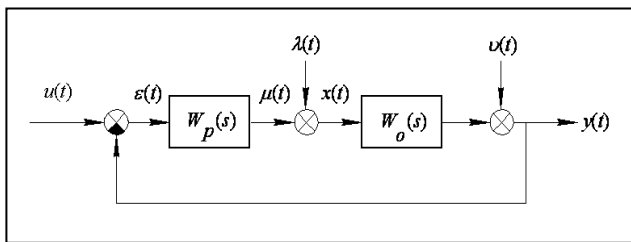


Рис. 1. Структурная схема одноконтурной САР

Объект регулирования в большинстве промышленных САР описывается дробно-рациональной передаточной функцией $W_0(s)$, включающей звено транспортного запаздывания. В качестве регулятора в примере, иллюстрирующем проведенные исследования, выбран типовой ПИ регулятор с передаточной функцией $W_p(s)$:

$$W_p(s) = k_p + \frac{k_u}{s}, \quad (1)$$

где k_p и $k_u = \frac{k_p}{T_u}$ – настроечные параметры ПИ регулятора (T_u – постоянная времени интегрирования).

On optimality criterion selection in numerical computation of automated control systems

The results of comparative analysis of various optimality criteria used in controller settings computation are presented. Along with integral criteria, used for calculating step test response, a criterion minimizing the variance of control variable's deviation under random disturbances is examined. A case study of a PI control loop is examined. Optimal settings for various optimality criteria are computed numerically based on a simulation model per a specified stability margin using Optim-MGA evolutionary algorithm [1, 2].

В расчетах, связанных с анализом систем регулирования [3], принято рассматривать две точки приложения действующих в САР возмущений: возмущение $\lambda(t)$, поступающее в объект вместе с регулирующим воздействием $\mu(t)$, и возмущение $\nu(t)$, приведенное к выходу объекта. Реакция системы в виде ошибки регулирования $\varepsilon(t)$ на возмущение $\nu(t)$ совпадает с реакцией на задающее воздействие $u(t)$ в системе управления и отличается от нее лишь знаком. Поскольку в системе регулирования задача ликвидации отклонений при неизменном задании $u(t)$ решается с помощью регулятора, работающего в замкнутом контуре, то возникает необходимость введения ограничений, связанных с запасом устойчивости.

Промышленные объекты регулирования обладают рядом особенностей и в первую очередь наличием транспортного запаздывания. Общепринятый метод дифференциальных уравнений с корневым показателем запаса устойчивости в виде степени колебательности m , несмотря на его широкое использование при расчете настроек, является приближенным. Предпочтительными следует считать методы, в которых запас устойчивости задается в виде частотного показателя колебательности M . Поскольку переходные процессы в САР чаще всего имеют колебательный характер, то в графиках амплитудно-частотной характеристики замкнутого контура $A_{3c}(\omega)$ имеет место резонансный пик при резонансной частоте $\omega(p)$. Отношение максимального значения $A_{3c}(\omega_p)$ к ее значению при нулевой

частоте $A_{zc}(\omega_0)$ и получило название частотного показателя колебательности. Несмотря на принятые в практике расчета САР соотношения между корневым и частотным показателями запаса устойчивости, эти два метода дают, как правило, заметно различающиеся результаты.

Другая особенность промышленных систем регулирования заключается в том, что они в реальных условиях находятся под действием не одного, а нескольких возмущений, имеющих чаще всего случайный характер. В связи с этим для принятой на рис. 1 структуры САР расчет настроечных параметров регулятора должен быть ориентирован на минимизацию отклонения регулируемой величины $y(t)$, вызванного действием случайных стационарных возмущений. В качестве критерия оптимальности в этом случае следует рассматривать минимум дисперсии этого отклонения на достаточно продолжительном интервале времени. Такой подход требует знания корреляционных функций возмущений, для оценки которых необходимы длительные реализации. В публикациях по статистическим оценкам корреляционных функций возмущений, имеющих место в промышленных технологических процессах, получила распространение следующая структура [4]:

$$r(\tau) = \sigma^2 \left[\frac{4}{3} \exp(-\alpha|\tau|) - \frac{1}{3} \exp(-4\alpha|\tau|) \right], \quad (2)$$

где α – параметр корреляционной функции, определяемый при ее неизменной структуре (2) точкой приложения возмущений $\lambda(t)$ и $\nu(t)$ (α_λ и α_ν , соответственно).

Реакцию системы на случайное возмущение по анализируемым каналам $\lambda(t)$ и $\nu(t)$, оцениваемую дисперсией отклонения $y(t)$, можно записать в виде следующих выражений:

$$D_{y,\lambda} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |W_{zc,\lambda}(j\omega)|^2 \cdot G_\lambda(\omega) \cdot d\omega; \\ D_{y,\nu} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |W_{zc,\nu}(j\omega)|^2 \cdot G_\nu(\omega) \cdot d\omega, \quad (3)$$

где $W_{zc,\lambda}(j\omega) = \frac{W_0(j\omega)}{1 + W_0(j\omega) \cdot W_p(j\omega)}$ – комплексная частотная характеристика замкнутой системы относительно возмущения $\lambda(t)$; $W_{zc,\nu}(j\omega) = \frac{1}{1 + W_0(j\omega) \cdot W_p(j\omega)}$ –

комплексная частотная характеристика замкнутой системы относительно возмущения $\nu(t)$; $G_\lambda(\omega)$ и $G_\nu(\omega)$ – спектральные плотности мощности возмущений $\lambda(t)$ и $\nu(t)$, являющиеся Фурье-изображением корреляционной функции $r(\tau)$ случайного эргодического стационарного процесса, отличающиеся значениями параметров α_λ и α_ν :

$$G(\omega) = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\alpha + j \cdot \omega} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4 \cdot \alpha + j \cdot \omega} \right). \quad (4)$$

Поскольку $W_{zc}(j\omega)$ зависит от точки приложения возмущения, критерий минимума дисперсии не является инвариантным даже при одинаковых характеристиках возмущений, действующих по различным каналам.

Хотя типовые возмущения и носят случайный характер, при анализе и синтезе линейных систем регулирования на стадии проектирования обычно используют реакцию на единичное ступенчатое воздействие. Во-первых, такой подход объясняется отсутствием сведений по корреляционным функциям случайных возмущений, во-вторых, ступенчатое возмущение можно рассматривать как наиболее тяжелое, вызывающее максимальное отклонение регулируемой величины. По этой причине практически все используемые в расчетах критерии оптимальности являются, в конечном, счете реакцией на ступенчатое воздействие. В первую очередь, сюда следует отнести критерии, связанные с максимальным отклонением регулируемой величины в переходном процессе и с длительностью самого переходного процесса, называемого временем регулирования, а также интегральные критерии в различной интерпретации, отображающие площадь под переходным процессом. Поскольку максимальное отклонение и время переходного процесса не имеют аналитической связи с настроечными параметрами регулятора, они могут использоваться в качестве критериев оптимальности лишь в численных методах. При этом настройка на минимальное отклонение требует ограничения на заданный запас устойчивости, поскольку этот критерий не имеет выраженного экстремума. Напротив, время переходного процесса имеет даже несколько экстремумов, включая глобальный. Причем глобальный экстремум находится в области достаточно большого запаса устойчивости, обеспечивая переходные процессы, близкие к апериодическим. Многоэкстремальность критерия обусловлена нелинейностью, вносимой зоной нечувствительности, поскольку без нее время переходного процесса теоретически стремится к бесконечности. В настоящей статье эти критерии не рассматриваются, хотя подобные исследования авторами проводились и были получены вполне удовлетворительные результаты их использования.

Объединение максимального отклонения и длительности переходного процесса наилучшим способом отображает площадь под графиком переходного процесса, которая определяется интегралом от модуля отклонения регулируемой величины I_M :

$$I_M = \int_0^\infty |y(t)| dt \leftarrow \min. \quad (5)$$

Интеграл по модулю также не имеет аналитической связи с настройками регулятора. Однако в численных методах расчета с использованием имитационных моделей этот критерий, имеющий экстремум в пределах области устойчивой работы САР, является наиболее удобным, поскольку обеспечивает хорошую сходимость.

Как в численных, так и в аналитических методах расчета широкое распространение получил квадратичный интегральный критерий I_K :

$$I_K = \int_0^\infty y^2(t) dt \leftarrow \min. \quad (6)$$

Возведение в квадрат позволяет устранить влияние отрицательных значений отклонения регулируемой величины. Квадратичный интегральный критерий в отличие от предыдущих критериев имеет аналитическую связь с настроечными параметрами регулятора. Его значение может быть вычислено по формуле, включающей КЧХ замкнутой системы $W_{зс}(j\omega)$ относительно анализируемого возмущения. Поскольку $W_{зс}(j\omega)$ зависит от точки приложения возмущения, I_k также, как и I_M , не является инвариантным относительно возмущений, действующих по различным каналам. При возмущениях $\lambda(t)$ и $\nu(t)$ выражение для I_k запишется в виде:

$$I_{k,\lambda} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left| \frac{W_0(j\omega)}{1 + W_p(j\omega) \cdot W_0(j\omega)} \right|^2 \cdot \frac{1}{\omega^2} d\omega; \quad (7)$$

$$I_{k,\nu} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left| \frac{1}{1 + W_p(j\omega) \cdot W_0(j\omega)} \right|^2 \cdot \frac{1}{\omega^2} d\omega.$$

Численные процедуры поиска оптимальных настроек регулятора, отвечающих минимуму квадратичного интегрального критерия, могут быть организованы как с использованием формул (7), так и непосредственно по имитационной модели. Поскольку настроечные параметры, минимизирующие этот критерий, при действии одного возмущения не будут оптимальными по отношению к другому, то представляется возможность их компромиссного объединения:

$$I_{кк} = \gamma \cdot I_{k,\lambda} + (1 - \gamma) \cdot I_{k,\nu}, \quad (8)$$

где γ – весовой коэффициент, принимающий значения от нуля до единицы. Использование компромиссного критерия позволяет выбрать настройки, удовлетворяющие обоим видам возмущений. Подобный компромисс возможен для всех не инвариантных критериев.

Отсутствие инвариантности приводит к определенным неудобствам при использовании таких критериев в задачах анализа и синтеза систем регулирования. В связи с этим целесообразно иметь критерий реальной инвариантности, которому лучше всего удовлетворяет линейный интегральный критерий [5, 6], представляющий собой простое значение интеграла от отклонения регулируемой величины в переходном процессе:

$$I_n = \int_0^{\infty} y(t) dt \rightarrow \min. \quad (9)$$

В отличие от I_M и I_k линейный интегральный критерий не имеет экстремума в пространстве настроечных параметров регулятора и может использоваться лишь при введении ограничения на запас устойчивости, гарантирующего затухание собственных колебаний системы. Минимуму критерия I_n в пространстве настроечных параметров соответствует точка $(k_p/T_u)_{\max}$, находящаяся на границе области заданного запаса устойчивости, что справедливо как для ПИ, так и для ПИД регуляторов. Поскольку граница заданного запаса устойчивости определяется замкнутым контуром САР, не зависящим от точки приложения возмущения, то такой критерий действительно отвечает требованиям

реальной инвариантности. Другими словами, настройка по этому критерию остается неизменной при возмущениях, вносимых в любую точку САР.

Наряду с неоспоримыми достоинствами этого критерия, такими как простота определения оптимальной настройки и его инвариантность относительно точки приложения действующих в системе возмущений, следует отметить и его очевидные недостатки. Этот критерий не имеет абсолютного экстремума, и его использование возможно лишь при наличии условий, ограничивающих запас устойчивости. К тому же переходные процессы с настройками по этому критерию оказываются по качеству с точки зрения максимального отклонения, перерегулирования и длительности переходного процесса заметно хуже, чем при других вышеупомянутых критериях при одинаковом ограничении на заданный запас устойчивости.

Таким образом, при постановке задачи анализа САР следует прежде четко определиться относительно цели регулятора, а затем, как следствие принятого решения, осуществить обоснованный выбор критерия оптимальности и показателя необходимого запаса устойчивости, ограничивающего область настроечных параметров.

В приведенном ниже примере представлены результаты сравнительного анализа использования рассмотренных интегральных критериев и критерия минимальной дисперсии. Математическая модель объекта регулирования задана в виде передаточной функции по каналу регулирующего воздействия:

$$W_0(s) = \frac{k_0 \cdot e^{-\tau_0 \cdot s}}{(T_0 \cdot s + 1)^3}, \quad (10)$$

где $k_0 = 0,45$; $\tau_0 = 0,52$ мин; $T_0 = 1,9$ мин.

Поскольку большинство критериев не удается связать достаточно простыми аналитическими зависимостями с настроечными параметрами регулятора, то наиболее приемлемыми в этом случае остаются численные методы расчета, включая использование имитационных моделей. В качестве алгоритма оптимизации использовался эволюционный многоэкстремальный алгоритм “Optim-MGA” в виде его пользовательской версии для математического пакета *Mathcad* [7]. Принцип действия алгоритма изложен на авторском сайте в сети *Internet* (<http://ai.xss.ru>) в разделе “Программные продукты”.

В качестве критериев оптимальности рассматривались интегральные критерии I_n , I_k , I_M и критерий минимальной дисперсии D_y . Запас устойчивости с целью объективного сравнения интегральных критериев I_n , I_k , I_M и критерия минимальной дисперсии D_y задавался в виде жесткого ограничения по частотному показателю колебательности $M = 1,55$. Расчеты с использованием критерия минимальной дисперсии проведены для случайного возмущения, поступающего в объект по каналу $\lambda(t)$, спектральная плотность мощности которого $G_\lambda(\omega)$, а также по каналу $\nu(t)$ со спектральной плотностью мощности $G_\nu(\omega)$. Для принятой структуры корреляционной функции (2) значения параметров α_k при возмущении $\lambda(t)$ и α_ν при возмущении $\nu(t)$ были

$\lambda(t)/\nu(t)$	№ точки	Критерий оптимальности	Настроечные параметры			Значения критериев оптимальности				ω_p
			k_p	k_n	T_n	I_n	$D_y \cdot 10^3$	I_m	I_k	
$\lambda(t)$	1	$I_{n,\lambda}$	2,3	0,661	3,52	1,513	7,83	2,123	0,315	0,349
	2	$D_{y,\lambda}$	3,3	0,587	5,54	1,704	6,74	1,784	0,255	0,431
	3	$I_{m,\lambda}$	3,3	0,578	5,71	1,730	6,76	1,783	0,254	0,434
	4	$I_{k,\lambda}$	3,5	0,548	6,30	1,825	6,83	1,832	0,252	0,445
$\nu(t)$	1	$I_{n,\nu}$	2,3	0,661	3,52	3,362	2,491	6,997	3,993	0,353
	2	$D_{y,\nu}$	2,6	0,655	3,97	3,393	2,444	6,696	3,824	0,373
	3	$I_{m,\nu}$	3,6	0,513	7,02	4,332	3,209	5,989	3,396	0,461
	4	$I_{k,\nu}$	3,8	0,458	8,30	4,852	3,746	6,055	3,372	0,475

Примечание: ячейки таблицы с минимальными значениями критериев для соответствующих точек выделены темным цветом.

выбраны по рекомендациям, изложенным в [8], исходя из показателя технологической работоспособности. Для принятых исходных данных получены значения $\alpha_\lambda = 0,0342$ и $\alpha_\nu = 0,0073$. Результаты выполненных расчетов представлены в таблице.

Для наглядности отображения полученных результатов для исследуемых критериев применительно к возмущениям $\lambda(t)$ и $\nu(t)$ были рассчитаны и построены поверхности отклика в плоскости настроечных параметров ПИ регулятора в виде линий их равного значения. На все поверхности отклика нанесена граница заданного запаса устойчивости, соответствующего показателю колебательности $M = 1,55$. Полученные таким образом рисунки позволяют наглядно подтвердить оптимальность каждой точки с соответствующими настроечными параметрами.

Результаты, приведенные в верхней части таблицы для возмущения $\lambda(t)$, отражены на рис. 2. В основу положены поверхности отклика с точками, соответствующими минимуму линейного интегрального критерия $I_{n,\lambda}$ (т. 1), минимуму дисперсии D_y (т. 2), а также минимуму интегрального критерия по модулю $I_{m,\lambda}$ (т. 3) и квадратичного интегрального критерия (т. 4). Таким образом, на рис. 2, а показана поверхность отклика для критерия $I_{n,\lambda}$; на рис. 2, б – для критерия $D_{y,\lambda}$; на рис. 2, в – для критерия $I_{m,\lambda}$ и на рис. 2, г – для критерия $I_{k,\lambda}$. Из рис. 2 видно, что для принятых исходных данных наиболее близкими к настройке регулятора на минимум дисперсии $D_{y,\lambda}$ (т. 2) оказались настройки, полученные при расчете на ступенчатое возмущение с интегральными

критериями $I_{m,\lambda}$ (т. 3) и $I_{k,\lambda}$ (т. 4). По отношению к линейному интегральному критерию $I_{n,\lambda}$ (т. 1) все они лежат значительно правее и ниже, что соответствует более высоким значениям настроечных параметров k_p и T_n , которые и обеспечивают снижение максимального отклонения регулируемой величины, а также уменьшения ее перерегулирования.

Таким образом, если ставится задача поиска настроек регулятора, минимизирующих дисперсию, то в рассмотренном случае предпочтительными оказываются настройки, полученные на ступенчатое возмущение по интегральным критериям $I_{m,\lambda}$ или $I_{k,\lambda}$.

Переходные процессы для точек 1, 2, 3 и 4 при возмущении $\lambda(t) = 1$ и соответствующие им амплитудно-частотные характеристики замкнутого контура (АЧХ) показаны на рис. 3.

Как следует из рис. 3, переходные процессы для точек 2, 3 и 4 практически совпадают, то же можно сказать и об амплитудно-частотных характеристиках.

На рис. 4 отображены результаты, представленные в нижней части таблицы для возмущений по каналу $\nu(t)$. Подтверждая инвариантность линейного интегрального критерия, соответствующая ему т. 1 оказалась, как

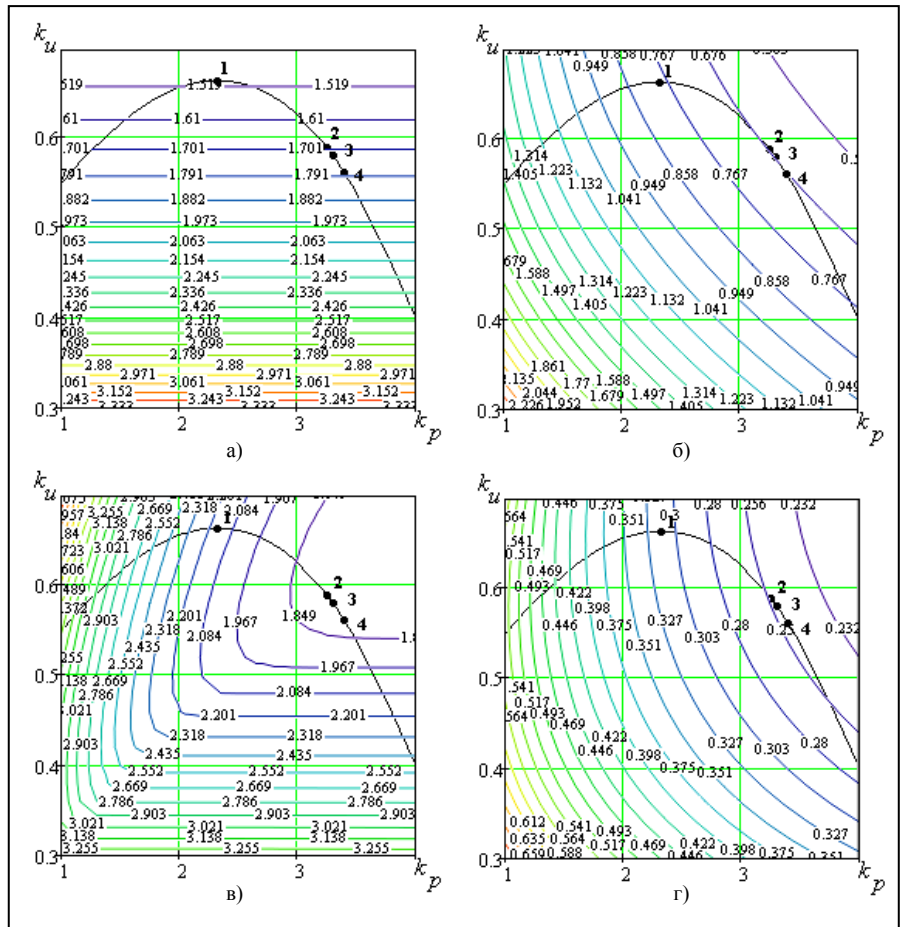


Рис. 2. Поверхности отклика с нанесенной границей заданного запаса устойчивости $M = 1,55$ и точками, обеспечивающими минимум анализируемых критериев при возмущениях $\lambda(t)$

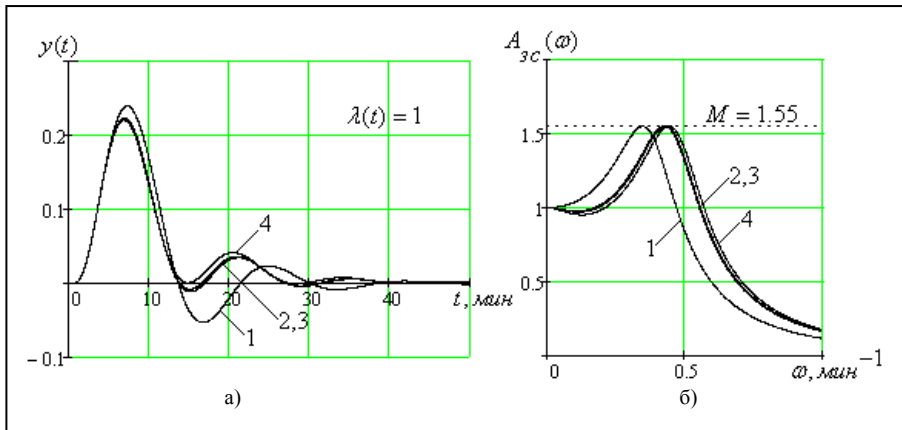


Рис. 3. Переходные процессы при возмущении $\lambda(t)$ (а) и соответствующие им АЧХ замкнутого контура (б)

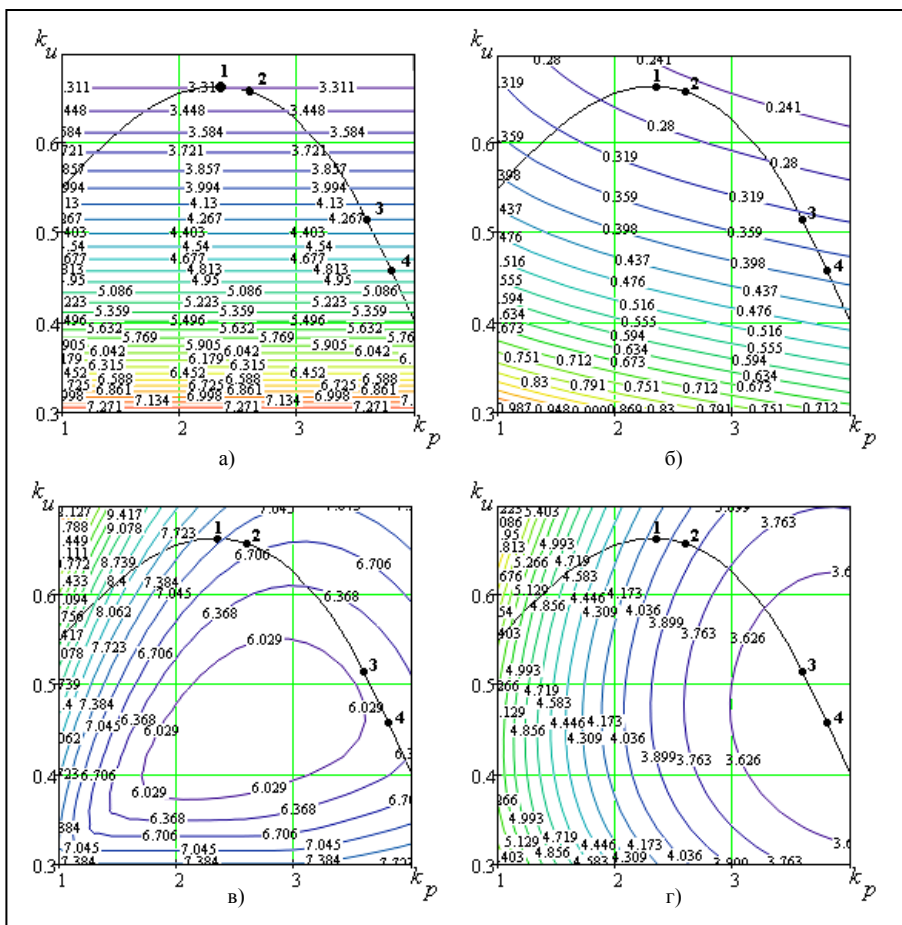


Рис. 4. Поверхности отклика с нанесенной границей заданного запаса устойчивости $M=1,55$ и точками, обеспечивающими минимум анализируемых критериев при возмущениях по каналу $v(t)$

и следовало ожидать, в тех же координатах, что и на рис. 2. Точка, соответствующая минимуму дисперсии (т. 2), поднялась по линии заданного запаса устойчивости вверх, приблизившись к т. 1. В свою очередь, т. 3 и 4, соответствующие интегральным критериям $I_{m,v}$ и $I_{k,v}$, сместились еще ниже и правее, подтверждая не инвариантность этих критериев. Другими словами, в этом случае для минимизации дисперсии предпочтительной становится настройка по линейному интегральному критерию. Переходные процессы и АЧХ,

соответствующие этим настройкам, показаны на рис. 5. Все они отвечают требованию заданного запаса устойчивости $M=1,55$.

На рис. 6 показаны полные поверхности отклика для дисперсии отклонения регулируемой величины при действии случайных возмущений по каналу $\lambda(t)$ (рис. 6,а), и по каналу $v(t)$ (рис. 6,б). Анализируя их, можно сделать вывод, что дисперсия так же, как и интегральные критерии, имеют выраженные экстремумы, наличие которых наряду с представленными поверхностями отклика подтверждают и настройки, найденные численным методом без какого-либо ограничения на запас устойчивости. Поскольку эти точки находятся достаточно близко к границе устойчивости, то в случае действия в системе детерминированных возмущений система может потерять устойчивость.

Интегральный критерий по модулю и квадратичный интегральный критерий также имеют абсолютные экстремумы при отсутствии ограничения на запас устойчивости, обеспечивая при этом более высокий запас устойчивости по сравнению с настройками на минимальную дисперсию. В частности, из рис. 4, в видно, что интегральный критерий по модулю при возмущении по каналу $v(t)$ обеспечивает даже больший запас устойчивости, чем принятый нами в проведенных расчетах. Точке абсолютного минимума этого критерия соответствуют настроечные параметры $k_p = 2,57$, $k_u = 0,471$ и показатель колебательности $M = 1,11$ при более низкой, чем в точке 3, резонансной частоте $\omega_p = 0,376$.

В заключение следует отметить, что для достижения значения дисперсии, приближающегося к минимальному, можно воспользоваться настроечными параметрами регулятора, полученными с использованием одного из рассмотренных интегральных критериев в зависимости от места приложения возмущения и принятой структуры его корреляционной функции. Проверку действительного значения дисперсии отклонения регулируемой величины при найденных настройках следует отнести на стадию ввода системы в действие.

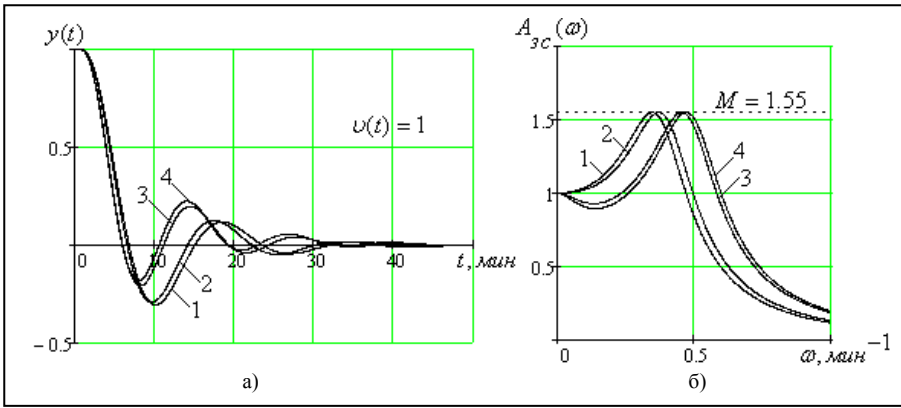


Рис. 5. Переходные процессы в одноконтурной САУ при возмущении $v(t)$ (а) и соответствующие им АЧХ замкнутого контура (б)

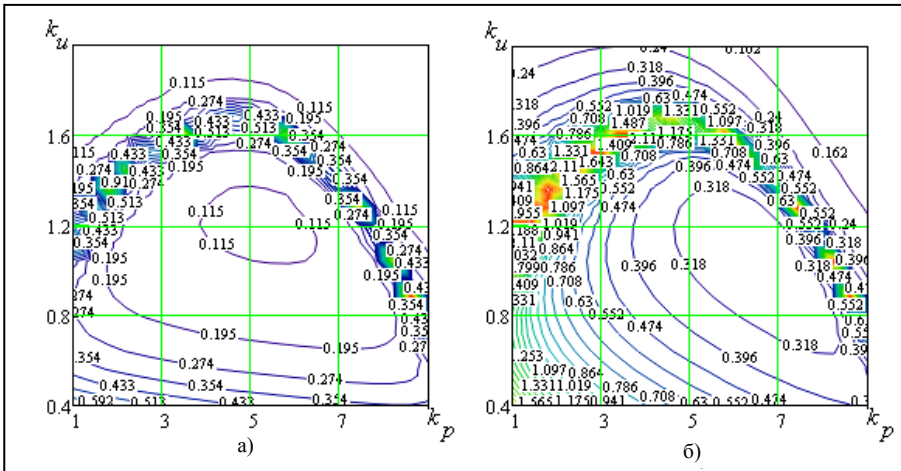


Рис. 6. Поверхности отклика для дисперсии ошибки регулирования, соответственно для возмущений по каналам $\lambda(t)$ (а) и $v(t)$ (б)

Следует также отметить, что при выборе другой структуры корреляционных функций случайных возмущений и других передаточных функций объекта регулирования численные результаты, естественно, будут отличаться от полученных в проведенном исследовании, однако общая тенденция должна сохраняться.

*Николай Иванович Смирнов – канд. техн. наук, доцент каф. АСУТП МЭИ, Игорь Михайлович Шаровин – бакалавр, обучается в магистратуре факультета Проблем Энергетической Эффективности МЭИ.
Телефон: (495) 362-77-20; E-mail: sbarovin@gmail.com*

Список литературы

1. Сабанин В.Р., Смирнов Н.И., Ретин А.И. Универсальная программа для оптимизации многоэкстремальных задач "Optim-MGA" // Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2004610862. Российское агентство по патентам и товарным знакам / (РОСПАТЕНТ). Москва, 8 апреля 2004.
2. Сабанин В.Р., Смирнов Н.И., Ретин А.И. Параметрическая оптимизация и диагностика с использованием генетических алгоритмов // Промышленные АСУ и контроллеры. 2004. № 12.
3. Пикина Г.А., Верховский А.В. Об одном методе расчета оптимальных настроек типовых регуляторов // Сб. научных трудов кафедры АСУТП. М.: Издательство МЭИ, 1998.
4. Ицкович Э.Л. Статистические методы при автоматизации производства. М. Энергия, 1964.
5. Ротач В.Я. О выборе критериев оптимальности систем управления с учетом случайного характера воздействий // Промышленные АСУ и контроллеры. 2006. № 9.
6. Ротач В.Я. Об особенностях критериев оптимальности систем автоматического управления технологическими процессами // Сб. трудов конференции CONTROL 2008. М.: Издательский дом МЭИ, 2008.
7. Сабанин В.Р., Смирнов Н.И., Ретин А.И. Модифицированный генетический алгоритм для задач оптимизации и управления // Exponenta Pro. Математика в приложениях. 2004. № 3-4.
8. Ротач В.Я. Теория автоматического управления. М.: Издательский дом МЭИ, 2007.