

Н.И. СМИРНОВ
канд. техн. наук, доцент,
И.М. ШАРОВИН
бакалавр
(МЭИ)

N.I. SMIRNOV,
I.M. SHAROVIN

О выборе критерия оптимальности в численных методах расчета САР с ПИД регулятором

Приводятся результаты использования различных критериев оптимальности в численных методах оптимизации настроечных параметров ПИД регулятора в одноконтурной САР. Проведенные исследования являются продолжением работы [1], в которой рассматривалась САР с ПИ регулятором. Наряду с интегральными критериями, применяемыми в расчетах систем регулирования на ступенчатое воздействие, рассмотрен критерий, минимизирующий дисперсию отклонения регулируемой величины при возмущениях, носящих случайный характер. Поиск оптимальных настроечных параметров проводился численным методом с использованием эволюционного алгоритма "Optim-MGA" [2, 3].

Ключевые слова: эволюционный алгоритм оптимизации, критерий оптимальности, показатель запаса устойчивости, интегральные критерии, оптимальные настроечные параметры, критерий минимальной дисперсии, корреляционная функция, переходный процесс, амплитудно-частотная характеристика, поверхность отклика, имитационное моделирование.

При решении задач синтеза и анализа САР в первую очередь встает вопрос о выборе критерия оптимальности. В работе [1] был проведен сравнительный анализ результатов расчета настроечных параметров ПИ регулятора в одноконтурной САР с интегральными критериями (линейным $I_{л}$, квадратичным $I_{к}$, по модулю $I_{м}$) и с критерием, минимизирующим дисперсию ошибки регулирования D . Ниже приводятся результаты аналогичного исследования САР с идеальным и реальным ПИД регуляторами. Структурная схема анализируемой САР представлена на рис. 1.

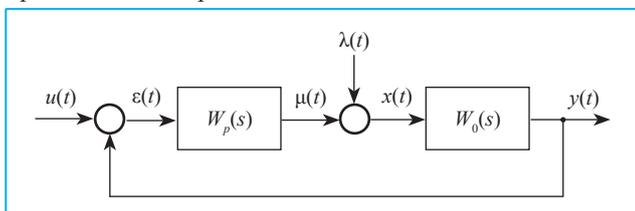


Рис. 1. Структурная схема САР

Интерес к регуляторам, действующим по ПИД закону регулирования, в последнее время заметно вырос [4]. В первую очередь это объясняется тем, что они позволяют получить более высокое качество регулирования по сравнению с традиционно применяемыми ПИ регуляторами. Существующие аналитические методы

On the selection of optimality criterion in numerical calculations of automatic control systems with PID controller

The results of different optimality criteria application in the numerical optimization of tuning parameters of a single-loop automatic control system. The research continues [1] where control systems with a PI controller were considered. Along with integral criteria applied for step responses calculation, a criterion minimizing the control variable's variance under random disturbances is investigated. The search of optimal settings is performed by numerical procedure based on Optim-MGA evolutionary algorithm [2,3].

Keywords: evolutionary optimization algorithm, optimality criterion, stability margin, integral criteria, optimal settings, correlation function, simulation.

настройки ПИД регуляторов, наряду с их неоднозначностью по используемым критериям, дают далеко не оптимальные результаты.

Передаточная функция идеального ПИД регулятора имеет вид:

$$W_{и.р.}(s) = k_p + \frac{k_p}{T_i} \cdot s + k_p \cdot T_d \cdot s, \quad (1)$$

где k_p – коэффициент передачи регулятора; T_i и T_d – постоянные времени интегрирования и дифференцирования.

С учетом обозначений $k_{и} = \frac{k_p}{T_i}$ и $k_{д} = k_p \cdot T_d$ выражение (1) принимает вид:

$$W_{и.р.}(s) = k_p + \frac{k_{и}}{s} + k_{д} \cdot s, \quad (2)$$

где $k_{и}$, $k_{д}$ – настроечные параметры интегральной и дифференциальной составляющих регулятора.

Передаточная функция (2) является более удобной для процедур численной оптимизации, поскольку однозначно определяет каждую из составляющих регулятора через соответствующие настроечные параметры.

Из-за наличия случайных высокочастотных помех во входном сигнале регулятора дифференциальную составляющую принято реализовывать в виде реального дифференцирующего звена. На практике эта процедура осуществляется с помощью фильтров с передаточной функцией апериодического звена n -го порядка.

Постоянную времени фильтра T_ϕ связывают с постоянной времени дифференцирования T_d с помощью коэффициента k_ϕ . Величина коэффициента k_ϕ , а также порядок фильтра n выбираются по результатам анализа вероятностных характеристик случайной помехи, исходя из ее оптимальной фильтрации при вычислении производных [5, 6]. С учетом соотношения $T_d = \frac{k_d}{k_p}$, передаточная функция для реального ПИД регулятора может быть выражена через принятые настроечные параметры k_p, k_n, k_d , коэффициент k_ϕ и порядок фильтра n в виде соотношения:

$$W_{p.p.}(s) = k_p + \frac{k_n}{s} + \frac{k_d \cdot s}{\left(\frac{k_d}{k_p \cdot k_\phi} \cdot s + 1\right)^n} \quad (3)$$

Передаточной функцией (3) описываются алгоритмы реальных ПИД регуляторов, реализуемых практически во всех отечественных и зарубежных микропроцессорных контроллерах. Величину коэффициента k_ϕ принято выбирать относительно небольшой – в диапазоне от пяти до десяти, а порядок фильтра n – не выше второго.

Вопросы, связанные с настройкой реальных ПИД регуляторов изложены в работах [7–10]. В работе [7] приводится аналитический метод расчета с линейным интегральным критерием оптимальности I_n и ограничением на величину частотного показателя колебательности M . Определение оптимальных настроек производится методом последовательных приближений, осуществляемых в режиме диалога на ПЭВМ. В работе [8] в отличие от известных интегральных критериев, нашедших широкое распространение в аналитических и численных методах расчета, рекомендуются экспертные критерии. С помощью процедуры многоуровневого сканирования осуществляется вывод системы регулирования на границу заданного запаса устойчивости, по результатам которого и определяется оптимальная настройка. В работе [9] для одноконтурной САР с ПИД регулятором предложены простые эмпирические формулы, позволяющие определять параметры настройки регулятора по переходной характеристике объекта регулирования. В работе [10] используются методы численной настройки реальных ПИД регуляторов с помощью эволюционного генетического алгоритма “Optim-MGA” по интегральным критериям с ограничением на величину частотного показателя запаса устойчивости. Рассматривается также возможность робастной компромиссной настройки, гарантирующей сохранение заданного запаса устойчивости при прогнозируемом характере изменения динамики объекта регулирования.

Промышленные объекты регулирования обычно описываются дробно-рациональными передаточными функциями с транспортным запаздыванием. С учетом отмеченного, предпочтительными следует выбирать методы, в которых запас устойчивости задается в виде частотного показателя колебательности M . Другая особенность заключается в том, что объекты в реальных

условиях находятся под действием возмущений, имеющих случайный характер. В качестве критерия оптимальности в этом случае рекомендуется минимум дисперсии отклонения регулируемой величины [11, 12]. Такой подход требует знания корреляционной функции действующего на объект возмущения. Реакция системы на случайное возмущение по каналу $\lambda(t)$, оцениваемая дисперсией отклонения регулируемой величины $y(t)$, записывается в виде:

$$D = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} |W_{\lambda, \lambda}(j \cdot \omega)|^2 \cdot G_\lambda(\omega) \cdot d\omega, \quad (4)$$

где $W_{\lambda, \lambda}(j \cdot \omega) = \frac{W_0(j \cdot \omega)}{1 + W_p(j \cdot \omega) \cdot W_0(j \cdot \omega)}$ – комплексная частотная характеристика замкнутой системы относительно возмущения $\lambda(t)$; $G_\lambda(\omega)$ – спектральная плотность мощности возмущения $\lambda(t)$, являющаяся *Фурье-изображением корреляционной функции* случайного эргодического стационарного процесса. С учетом рекомендаций [13] выражение для $G_\lambda(\omega)$ принимается в виде:

$$G_\lambda(\omega) = 2 \cdot \text{Re} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\alpha_\lambda + j \cdot \omega} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4 \cdot \alpha_\lambda + j \cdot \omega} \right). \quad (5)$$

Величина параметра α_λ и передаточная функция объекта регулирования $W_0(s)$ в приведенном ниже примере приняты такими же, как и в работе [1].

При исследовании систем регулирования на ступенчатое воздействие в качестве критериев оптимальности используют интегральные критерии. Наиболее адекватно площадь под графиком переходного процесса отображает интеграл по модулю отклонения регулируемой величины:

$$I_m = \int_0^{\infty} |y(t)| \cdot dt \leftarrow \min. \quad (6)$$

Не имея аналитической связи с настроечными параметрами регулятора, этот критерий обладает абсолютным минимумом в области устойчивой работы САР. С учетом отмеченного, в численных методах расчета с использованием имитационных моделей он является наиболее удобным, поскольку обеспечивает хорошую сходимость.

Широкое распространение получил квадратичный интегральный критерий:

$$I_k = \int_0^{\infty} y^2(t) \cdot dt \leftarrow \min. \quad (7)$$

Возведение в квадрат позволяет устранить влияние отрицательных значений отклонения регулируемой величины, к тому же этот критерий имеет аналитическую связь с настроечными параметрами регулятора. Его значение может быть вычислено по формуле, включающей КЧХ замкнутой системы относительно анализируемого возмущения. Для возмущения $\lambda(t)$ выражение I_k записывается в виде:

$$I_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} \left| \frac{W_0(j \cdot \omega)}{1 + W_p(j \cdot \omega) \cdot W_0(j \cdot \omega)} \right|^2 \cdot \frac{1}{\omega^2} \cdot d\omega. \quad (8)$$

Численные процедуры поиска оптимальных настроек регулятора, соответствующих минимуму I_k , могут быть реализованы как по имитационной модели с использованием формулы (7), так и непосредственно по формуле (8).

ПИД регулятор	№ точки	Критерий оптимальности	Настроечные параметры					Значения критериев оптимальности				
			k_p	k_n	k_d	T_n	T_d	I_d	$D \cdot 10^3$	I_m	$I_k \cdot 10^3$	
Идеальный	1'	I_d	6,63	4,01	20,0	1,65	3,02	0,249	0,443	0,693	30,7	
	2'	D	7,37	3,94	18,2	1,87	2,47	0,254	0,413	0,609	29,2	
	3'	I_m	7,68	2,43	14,1	3,16	1,84	0,412	0,708	0,533	35,8	
	4'	I_k	7,34	3,95	18,3	1,86	2,50	0,253	0,413	0,612	29,2	
Реальный	1''	I_d	4,92	2,65	12,95	1,86	2,63	0,377	0,9	0,867	56,5	
	2''	D	5,46	2,60	11,98	2,10	2,19	0,385	0,863	0,792	54,2	
	3''	I_m	6,13	1,65	9,60	3,73	1,56	0,608	1,338	0,667	60,5	
	4''	I_k	5,56	2,39	11,80	2,33	2,12	0,418	0,931	0,757	53,9	

Прямую связь с настроечными параметрами регулятора имеет линейный интегральный критерий:

$$I_d = \int_0^{\infty} y(t) \cdot dt \leftarrow \min. \quad (9)$$

Минимуму критерия I_d в пространстве настроечных параметров соответствует точка $k_n = \left(\frac{k_p}{T_n}\right)_{\max}$ на границе области заданного запаса устойчивости.

Ниже приводятся результаты использования интегральных критериев и дисперсии в численных расчетах настроечных параметров ПИД регулятора. Передаточная функция объекта регулирования принята в виде:

$$W_0(s) = \frac{k_0 \cdot e^{-\tau_0 \cdot s}}{(T_0 \cdot s + 1)^3}, \quad (10)$$

где $k_0 = 0,45$; $\tau_0 = 0,52$ мин; $T_0 = 1,9$ мин.

Для оптимизации настроечных параметров использовался эволюционный многоэкстремальный алгоритм "Optim-MGA" в виде его пользовательской версии для математического пакета Mathcad [14]. Принцип

действия алгоритма изложен на сайте в сети Internet (<http://ai.xss.ru>) в разделе "Программные продукты".

Запас устойчивости с целью объективного сравнения интегральных критериев I_d , I_m , I_k и дисперсии D задавался в виде жесткого ограничения на частотный показатель колебательности ($M = 1,55$). Результаты выполненных расчетов с оценкой анализируемых критериев представлены в таблице.

Примечание:

- Для реального ПИД регулятора $n = 1$, $k_\phi = 8$.
- Ячейки таблицы с минимальными значениями критериев для соответствующих точек выделены темным цветом.
- Все графики на приведенных ниже рисунках для идеального и реального ПИД регуляторов для удобства визуального сравнения выполнены в одинаковых масштабах.

С целью наглядного отображения полученных результатов для исследуемых критериев применительно к идеальному (рис. 2, а) и реальному (рис. 2, б) ПИД

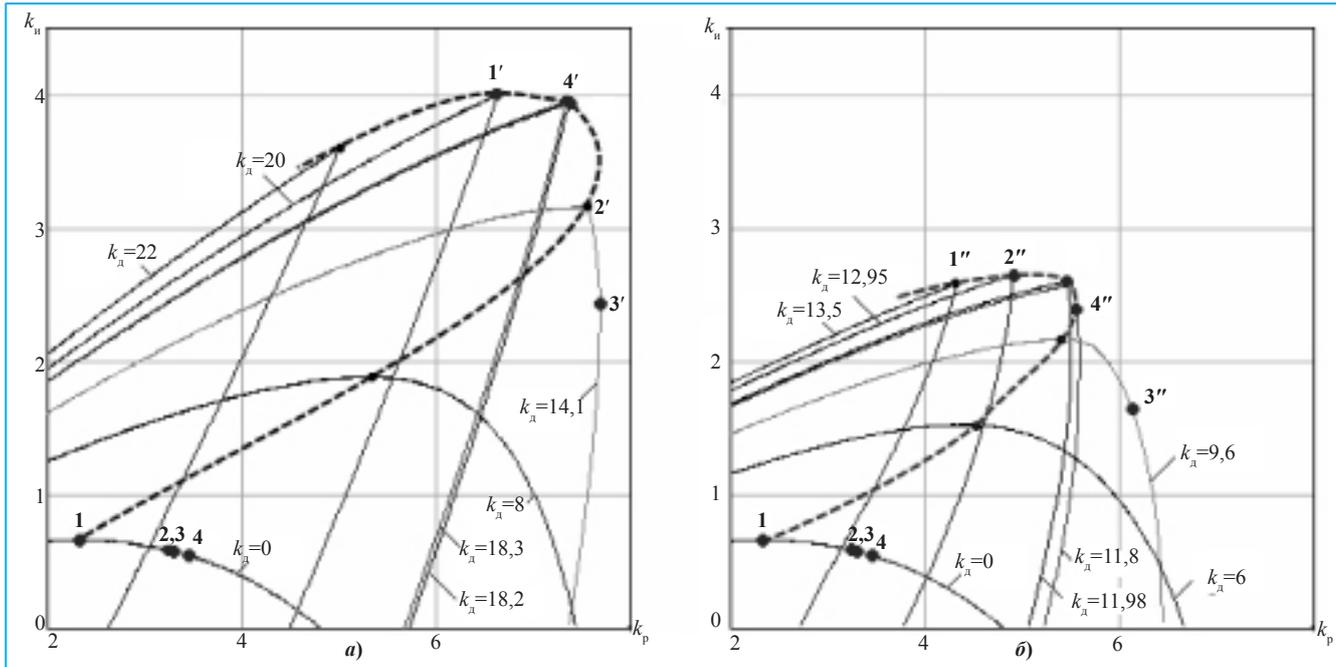


Рис. 2. Линии заданного запаса устойчивости ($M=1,55$) в плоскости настроечных параметров k_p , k_n при различных значениях k_d : а) для идеального ПИД регулятора; б) для реального ПИД регулятора.

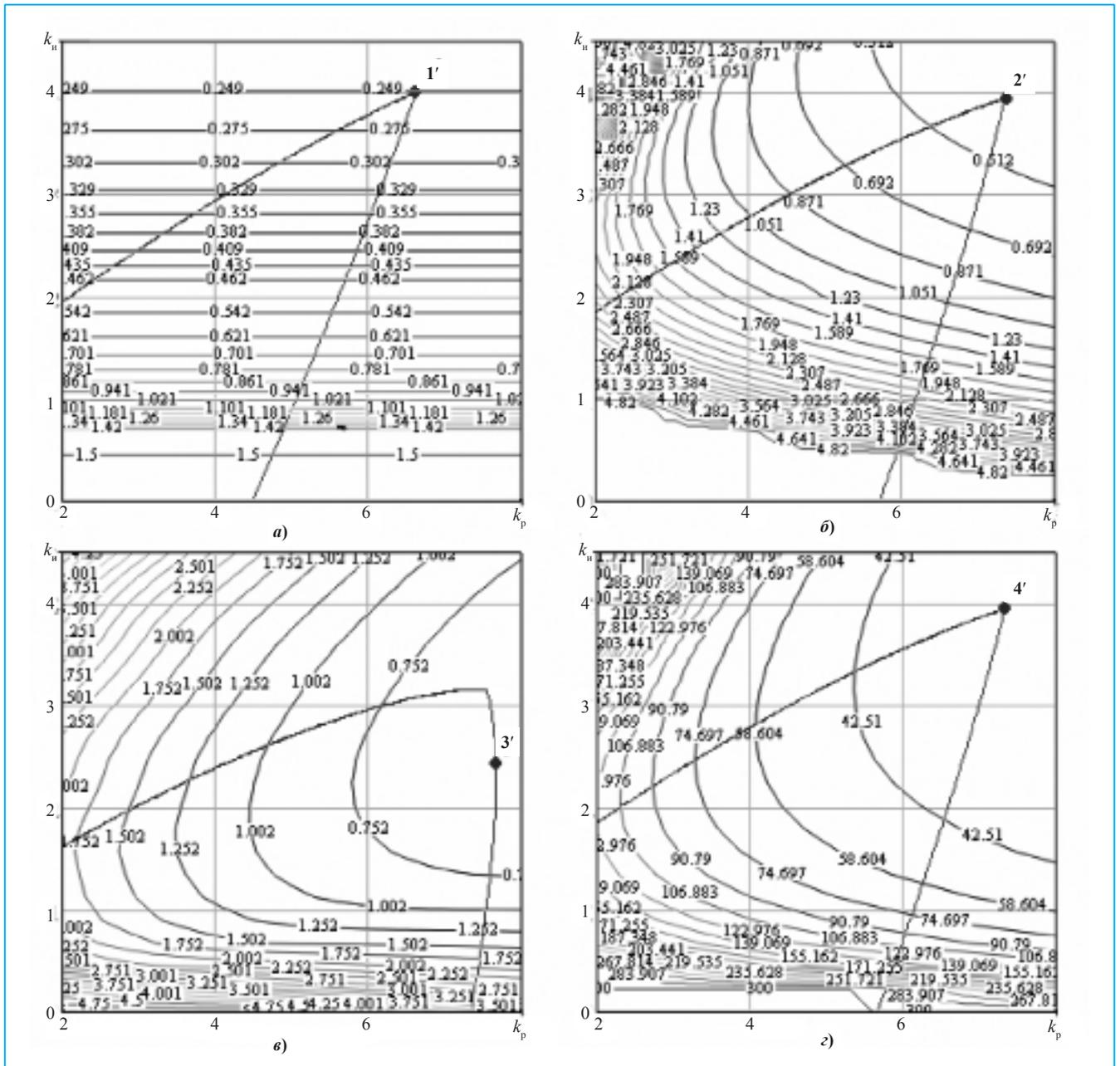


Рис. 3. Поверхности отклика с нанесенной границей заданного запаса устойчивости при оптимальных k_d с оптимальными точками для идеального ПИД регулятора: а) для критерия I_d ; б) для дисперсии D ; в) для критерия I_m ; г) для критерия I_k .

регуляторам построены линии заданного запаса устойчивости ($M = 1,55$) в плоскости настроечных параметров k_p, k_n при соответствующих оптимальных значениях k_d и на этих линиях показаны анализируемые точки с минимальными значениями критериев. Диапазон изменения k_d выбран таким образом, чтобы его значения охватывали область настроечных параметров всех анализируемых точек.

Точки, соответствующие оптимальным настройкам ПИ регулятора [1], показаны на линии $k_d = 0$ (для линейного интегрального критерия I_d – точка 1, для дисперсии D – точка 2, для интегрального критерия по модулю I_m – точка 3 и для квадратичного интегрального критерия I_k – точка 4). Расположение точек в САР с идеальным ПИД регулятором для тех же критериев

показано под номерами 1', 2', 3' и 4', с реальным ПИД регулятором под номерами 1'', 2'', 3'' и 4''.

Анализ расположения исследуемых точек показал, что настройки по дисперсии D (2' и 2''), найденные на случайное возмущение, оказались наиболее близкими к настройкам на ступенчатое возмущение по критерию I_k (4' и 4''). Достаточно близкими к настройкам по дисперсии оказались и настройки по линейному интегральному критерию I_d (1' и 1''). Точки 3' и 3'', соответствующие оптимальным настройкам по критерию I_m , расположились значительно правее и ниже точек 1' и 1'' с настройками по критерию I_d . Таким образом, если ставится задача поиска настроек, минимизирующих дисперсию, то в рассматриваемом примере с достаточной степенью точности можно взять настроечные параметры

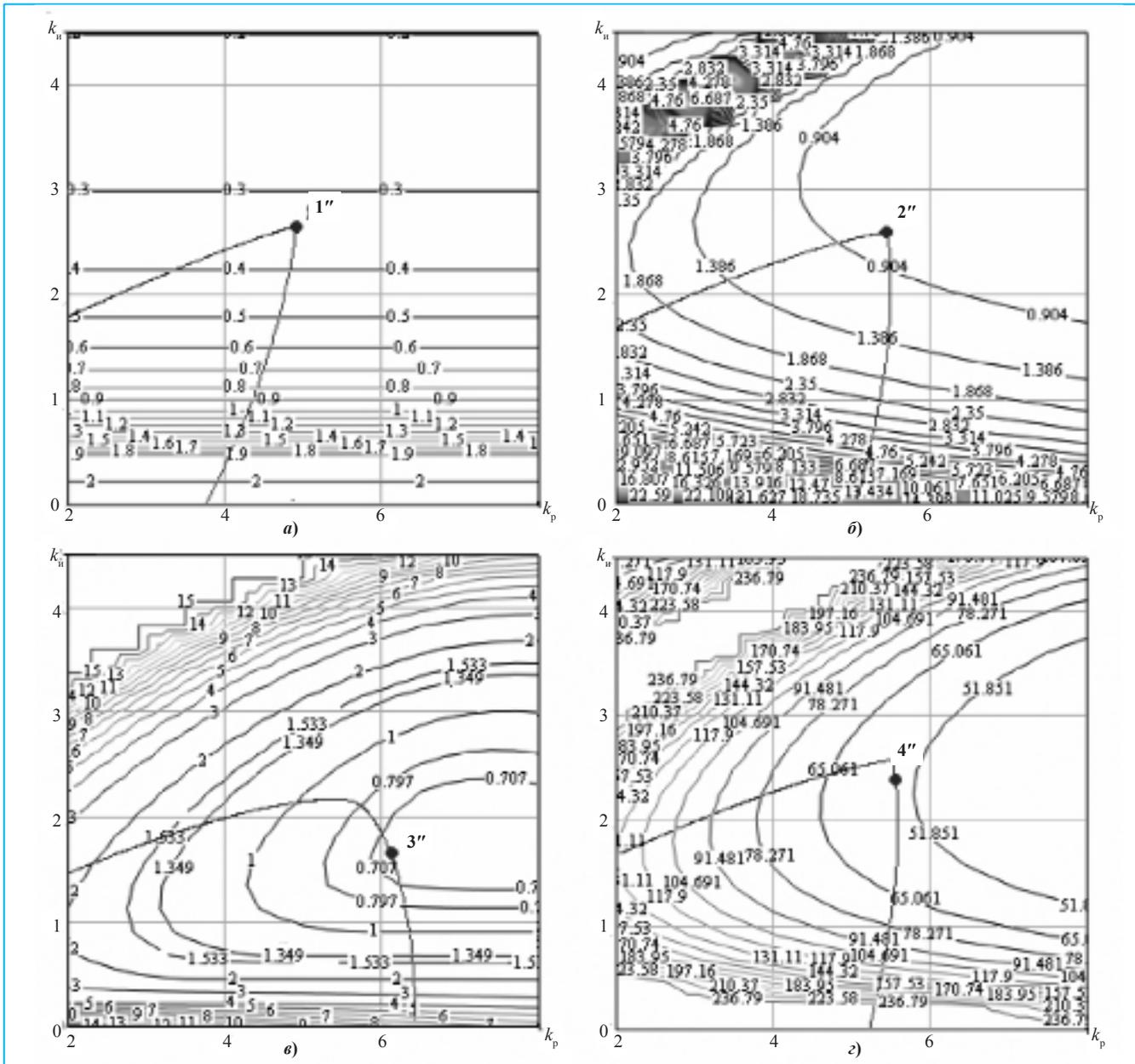


Рис. 4. Поверхности отклика с нанесенной границей заданного запаса устойчивости при оптимальных k_d с оптимальными точками для реального ПИД регулятора: а) для критерия I_{Σ} ; б) для дисперсии D ; для критерия I_{Σ} ; г) для критерия I_k .

соответствующие точкам 1', 4'' (идеальный ПИД регулятор) и в точках 1', 4'' (реальный ПИД регулятор).

Для наглядного подтверждения оптимальности расположения анализируемых точек на рис. 3 (для идеального ПИД регулятора) и на рис. 4 (для реального ПИД регулятора) показаны поверхности отклика анализируемых критериев в плоскости настроечных параметров k_p, k_n с нанесенными линиями заданного запаса устойчивости ($M = 1,55$) при соответствующих оптимальных значениях k_d , а также сами точки.

Из рисунку 3 видно, что оптимальные точки 1' (рис. 3, а), 2' (рис. 3, б) и 4' (рис. 3, г) лежат на пиках соответствующих линий $M = 1,55$, что подтверждается и линиями равных значений соответствующих критериев на поверхности отклика. Точка 3' не имеет отмеченной выше особенности и располагается правее и ниже пика

линии запаса устойчивости, что также подтверждается и линиями поверхности отклика (рис. 3, в).

Относительное расположение анализируемых точек, с подтверждением их оптимальности, сохранилось и для реального ПИД регулятора (рис. 4). Наиболее близкими к настроечным параметрам, полученным исходя из минимума дисперсии D (т. 2''), также оказались настройки при расчете на минимум квадратичного интегрального критерия I_k (т. 4''), что подтверждается качественным совпадением соответствующих поверхностей отклика (рис. 4, б и 4, г). Таким образом, поверхности отклика, представленные на рисунках 3 и 4 наглядно подтверждают, что настройки, найденные предложенным авторами численным методом, как для идеального, так и для реального ПИД регулятора обеспечивают минимум прироста в расчетах критериев.

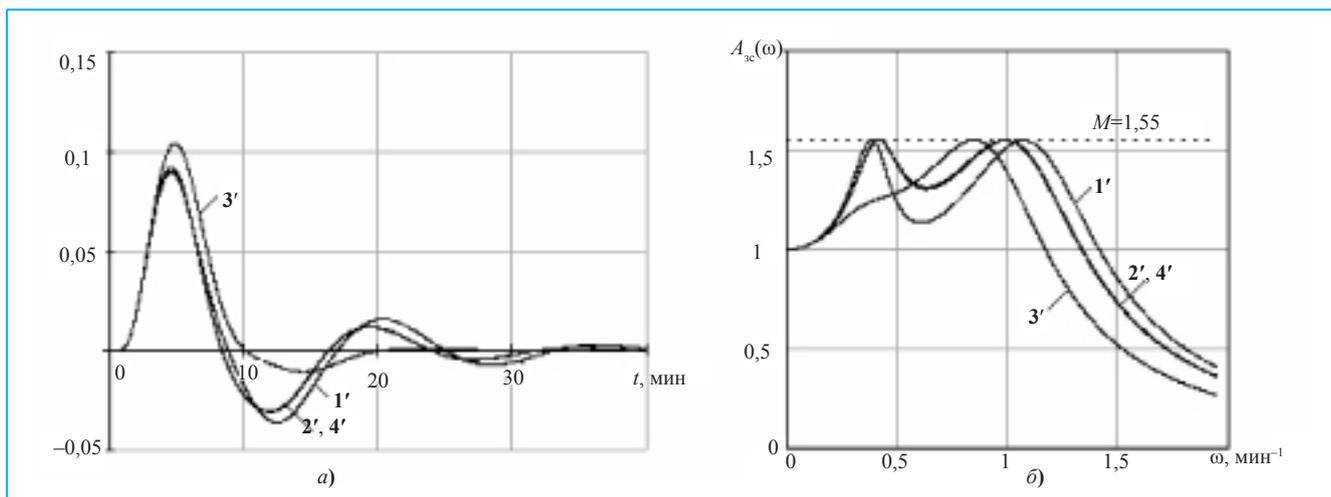


Рис. 5. Переходные процессы в САР с идеальным ПИД регулятором (а) и соответствующие им АЧХ замкнутого контура (б).

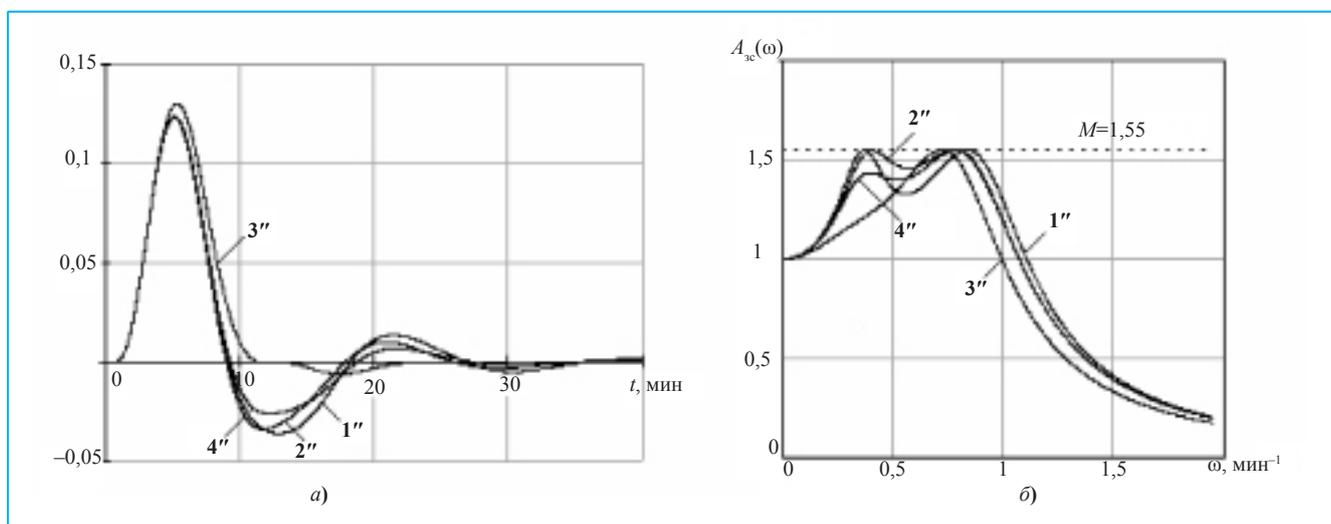


Рис. 6. Переходные процессы в САР с реальным ПИД регулятором (а) и соответствующие им АЧХ замкнутого контура (б)

Переходные процессы в САР с идеальным ПИД регулятором для точек 1', 2', 3', 4' и соответствующие им амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) замкнутого контура показаны на рисунке 5.

Как и следовало ожидать, переходные процессы для точек 1', 2' и 4' практически совпадают, то же можно сказать и об амплитудно-частотных характеристиках.

Отмеченное выше обособленное расположение точки 3' для интегрального критерия I_m (правее и ниже остальных точек в плоскости настроечных параметров) соответствует более высоким значениям k_p и T_n , которые и обеспечивают заметное уменьшение площади под переходным процессом, и практически исключают перерегулирование. Отмеченная тенденция для переходных процессов и АЧХ сохраняется и для реального ПИД регулятора (рис. 6).

В заключение следует отметить, что настроечные параметры, минимизирующие интегральный критерий по модулю, являются наиболее предпочтительными, как для идеального, так и для реального ПИД регулятора, поскольку они обеспечивают минимальную

площадь под переходным процессом, минимальное перерегулирование, высокую степень затухания и, как следствие, минимальное время регулирования. С учётом практического совпадения настроечных параметров, полученных для квадратичного интегрального критерия I_k и критерия по дисперсии D , можно сделать вывод о том, что для минимизации дисперсии ошибки регулирования можно использовать настроечные параметры, полученные при ступенчатом возмущении с квадратичным интегральным критерием.

Для других передаточных функций объекта регулирования и выборе иной структуры корреляционных функций случайных возмущений, численные результаты будут отличаться от полученных в проведенном исследовании, однако общая тенденция должна сохраняться.

*Николай Иванович Смирнов – кафедра АСУТП МЭИ,
Игорь Михайлович Шаровин – магистратура
факультета Проблем Энергетической
Эффективности МЭИ.
Телефон (495) 362-77-20.
E-mail: sharovin@gmail.com*